موسسه تدریس خصوصی

مدرسین تهران

- **تدریس خصوصی دروس دانشگاهی:** مقاطع دکتری، کارشناسی ارشد، کارشناسی
- **آموزش نرم‌افزارهای تخصصی:** تمامی رشته های مهندسی
- **ترجمه متون تخصصی:** تمامی رشته های دانشگاهی
- **با همکاری اساتید دانشگاه ها:** خانم و آقا

۰۲۱-۷۷۴۹۹۹۲۵

۰۹۲۱-۲۰۲۸۲۹۵

Modaresine Tehran

آدرس سایت : www.ModaresineTehran.com

پست الکترونیک: ModaresineTehran@gmail.com

کانال تلگرام تهران مرکز: @Iranian_Academics

به نام خدا

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲ — دانشگاه شهید بهشتی

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۵ — ۳۱ فروردین ۱۳۹۶، زمان: ۹۰ دقیقه

---

۱. برای خم $\vec{R}(t) = (e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t, 2e^{2t})$ در نقطه $t = 0$ بردارهای $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ و مقادیر κ, τ را بدست آورید.

۲. الف) پیوستگی تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
را در مبدأ مختصات بررسی کنید.

ب) برای تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
، مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ را در صورت وجود بیابید و سپس پیوستگی تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ را در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید.

۳. اگر f, g توابعی دو بار مشتق‌پذیر و $u(x,y) := xf(x+y) + yg(x+y)$، آنگاه ثابت کنید
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

۴. رویه $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ را درنظر بگیرید. مطلوب است:

الف) مشتق جهتی f در نقطه $P = (1,1,-1)$ و در جهت بردار $\vec{u} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ را بدست آورید.

ب) بیشترین مقدار مشتق جهتی f در نقطه P چقدر است و در چه جهتی رخ می‌دهد؟

ج) معادلهٔ صفحه مماس بر رویه $f(x,y,z) = 0$ را در نقطه P بنویسید.

۵. الف) نزدیکترین نقطه رویهٔ $z = \frac{1}{x^2y}$ تا مبدأ مختصات را بدست آورید.

ب) نقاط اکسترمم نسبی و زینی تابع $f(x,y) = \sin x \sin y$ را در مستطیل $-\pi < x, y < \pi$ بیابید.

سؤال اول

$$R'=\left(e^{2t}(2\cos t-\sin t),\ e^{2t}(2\sin t+\cos t),\ 4e^{2t}\right)$$

$$R''=\left(e^{2t}(3\cos t-4\sin t),\ e^{2t}(3\sin t+4\cos t),\ 8e^{2t}\right)$$

$$R'''=\left(e^{2t}(2\cos t-11\sin t),\ e^{2t}(2\sin t+11\cos t),\ 16e^{2t}\right)$$

$$|R'|=\sqrt{21}\,e^{2t}$$

$$\vec{T}=\frac{R'}{|R'|}=\frac{1}{\sqrt{21}}\left((2\cos t-\sin t),(2\sin t+\cos t),4\right)$$

$$\boxed{\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{21}}(2,1,4)}$$

$$T'=\frac{1}{\sqrt{21}}\left((-2\sin t-\cos t),(2\cos t-\sin t),0\right)$$

$$T'(0)=\frac{1}{\sqrt{21}}(-1,2,0)\rightarrow |T'|=\sqrt{\frac{5}{21}},\quad \boxed{\vec{N}=\frac{T'}{|T'|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0)}$$

$$\boxed{B=T\times N=\frac{1}{\sqrt{105}}(-8,-4,5)}$$

$$R'(0)=(2,1,4),\quad R''(0)=(3,4,8),\quad R'\times R''=(-8,-4,5)$$

$$|R'\times R''|=\sqrt{64+16+5}=\sqrt{85},\quad \boxed{\kappa=\frac{|R'\times R''|}{|R'|^3}=\sqrt{\frac{85}{(21)^3}}}$$

$R'(0)=(2,1,4)$, $R''(0)=(3,4,8)$ و $R'''(0)=(2,11,16)$

$R'(0)\cdot(R''(0)\times R'''(0))=20$

$$\boxed{\tau(0)=\frac{R'(0)\cdot(R''(0)\times R'''(0))}{|R'\times R''|^2}=\frac{20}{41}}$$

سؤال دوم

الف) اولاً حد تابع در مسوار مختصات موجود است زیرا اولاً برای هر

مسیری مانند $y=mx$ داریم

$$\lim_{(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{m^4x^8}{x^4+m^4x^4}=0$$

پس ثابت می‌کنیم حد مورد نظر برابر با صفر است.

طبق تعریف حد داریم:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \text{s.t.}\ \begin{array}{l}|x|<\delta\\ |y|<\delta\end{array} \Rightarrow \left|\frac{x^4y^4}{x^4+y^4}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{x^4y^4}{x^4+y^4} < \frac{x^4(x^4+y^4)}{x^4+y^4} = x^4 < \delta^4$$

پس کافی است $\delta < \sqrt[4]{\varepsilon}$ انتخاب شود. ولذا حکم ثابت و

$$\lim_{(0,0)} f(x,y)=0$$

لازم به ذکر است محاسبه این حد می‌توانست از طریق تغییر متغیر قطبی هم انجام شود.

با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^4y^4}{x^4+y^4} = \lim_{r\to 0} \frac{r^8\cos^4\theta\cdot\sin^4\theta}{r^4\cos^4\theta+r^4\sin^4\theta} = 0$$

ثانیاً مقدار تابع در مبداء موجود است

ثالثاً حد تابع در مبداء و مقدار آن در مبداء برابر است پس تابع پیوسته است.

ب) از آنجایی که ضابطه تابع در $(0,0)$ تغییر می‌کند بنابراین تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ در این نقطه را از طریق تعریف آن بدست می‌آوریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ پیوسته نیست چراکه $\lim\limits_{(0,0)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ موجود نمی‌باشد

دلیل: بر مسیر $y=mx$ داریم

$$\lim_{(0,0)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4(1+3m^2+2m^3)}{x^4(1+m^2)^2}=\frac{(1+3m^2+2m^3)}{(1+m^2)^2}$$

پس $\frac{\partial f}{\partial x}$ پیوسته نمی‌باشد

سوال سوم

قرار می‌دهیم $v=x+y$ پس داریم

$$u=xf(v)+yg(v)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xf_v\cdot\underset{=1}{v_x}+f+yg_v\underset{=1}{v_x}=xf_v+f+yg_v$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_v\cdot\underset{=1}{v_y}+yg_v\underset{=1}{v_y}+g=xf_v+g+yg_v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_v+xf_{vv}\cdot\underset{=1}{v_x}+f_v\underset{=1}{v_x}+yg_{vv}\underset{=1}{v_x}=2f_v+xf_{vv}+yg_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_v+xf_{vv}\underset{=1}{v_x}+g_v\cdot\underset{=1}{v_x}+yg_{vv}\underset{=1}{v_x}=f_v+g_v+xf_{vv}+yg_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xf_{vv}\underset{=1}{v_y}+g_v\underset{=1}{v_y}+g_v+yg_{vv}\cdot\underset{=1}{v_y}=2g_v+xf_{vv}+yg_{vv}$$

واضح است که با نتایج بدست آمده خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

سؤال ۴ الف) اولاً داریم $|\vec{u}|=1$ پس بردار $\vec{u}$ یکه است.

$$\vec{\nabla}f=(4x,-2y,-2z)\rightarrow\vec{\nabla}f(p)=(4,-2,2)$$

$$\boxed{D_{\vec{u}}^{f}=\vec{\nabla}f\cdot\vec{u}=(4,-2,2)\cdot\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)=\tfrac{14}{3}}$$

ب) می‌دانیم بیشترین مقدار مشتق جهتی در جهت بردار گرادیان رخ می‌دهد و مقدار آن برابر با اندازه‌ی بردار گرادیان می‌باشد

$$|\vec{\nabla}f(p)|=|(4,-2,2)|=\sqrt{24}$$

ج) بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه همان بردار گرادیان است. بنابراین

معادله‌ی صفحه‌ی مماس $\Rightarrow$ $\boxed{4(x-1)-2(y-1)+2(z+1)=0}$

سؤال ۵ فاصله تا مبدأ مختصات عبارت است از $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ انقلم

پس باید کمترین مقدار تابع f تحت شرط $z=\frac{1}{x^2y}$ را محاسبه کنیم

برای آسانی با تابع $f^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ کار خواهیم کرد.

$$\begin{cases} \nabla f^2 = \lambda \nabla g \Rightarrow (2x,2y,2z)=\lambda\left(\frac{2}{x^3y},\frac{1}{x^2y^2},1\right) \\ g(x,y,z)=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2y}-z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=\frac{2\lambda}{x^3y} \quad (1) \\ 2y=\frac{\lambda}{x^2y^2} \quad (2) \\ 2z=\lambda \quad (3) \\ z=\frac{1}{x^2y} \quad (4) \end{cases}$$

از معادلات ۱ و ۲ داریم $x^2=2y^2$ (۵)

با جاگذاری ۵ و ۲ در ۴ خواهیم داشت $\lambda=\frac{1}{y^4}$ (۶).

با جاگذاری ۶ در ۲ داریم $x^2=\frac{\lambda^2}{2}$ (۷).

حال با جاگذاری ۳ و ۶ و ۷ در ۴ خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{2}{\lambda^2}\cdot\sqrt[3]{\lambda} \Rightarrow \lambda^3=4\sqrt[3]{\lambda} \Rightarrow \lambda^9=4\lambda$$

$$\lambda(\lambda^8-4)=0 \quad \begin{cases} \lambda=0 \ \times \\ \lambda=\sqrt[8]{4} \ \checkmark \end{cases}$$

$$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} \quad , \quad y^2=\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{y=\pm\sqrt[4]{2}}$$

$$z=\frac{1}{x^2y}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}} \rightarrow \boxed{z=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}}$$

ب) ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y$ را بدست می‌آوریم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \longrightarrow \cos x\cdot\sin y=0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \longrightarrow \sin x\cdot\cos y=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l}① \ (0,0)\\ ② \ (-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}),(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\end{array}$$

$f_{xx}=-\sin x\cdot\sin y \ / \ f_{yy}=-\sin x\cdot\sin y$

$f_{xy}=\cos x\cdot\cos y=f_{yx}$

$$\Delta(0,0)=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2 \Longrightarrow \Delta(m\pi,n\pi)<0$$

پس نقطه (۰و۰) یک نقطه زینی تابع است

$(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Delta>0,\ f_{xx}<0$ max نسبی

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Delta>0,\ f_{xx}>0$ min نسبی

$(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Delta>0,\ f_{xx}>0$ min نسبی

$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Delta>0,\ f_{xx}<0$ max نسبی